Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA

D. Prelat - 2020

§5) DERIVABILIDAD Y HOLOMORFÍA

Como ya hemos mencionado en la presentación del curso, el concepto de derivabilidad no presenta ninguna novedad esencial respecto del Análisis I. La definición y las primeras propiedades operativas son las mismas, salvo el cambio de notación. Las primeras diferencias aparecen a poco de andar. Usted recuerda (es deseable que así sea) el uso de las derivadas de funciones de una variable real para el estudio de crecimiento y extremos locales de dichas funciones. Obviamente, para funciones de variable compleja esto no ocurre, pues no existe ninguna relación de orden aritmético entre los números complejos, por lo tanto no tienen ningún sentido los conceptos de funciones de variable compleja "crecientes" o "decrecientes", ni de "máximos" ni "mínimos" de estas funciones. Lo que sí tiene sentido, y - como veremos - es muy importante, son los conceptos de máximos y mínimos del <u>módulo</u> de una función de variable compleja, conceptos que aparecen con otro disfraz en Análisis II: dada una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, la función $|f| : D \longrightarrow \Re$ no es otra cosa que un campo escalar en el plano.

La derivabilidad de una función de variable compleja en un punto de su dominio no tiene consecuencias interesantes. En cambio, sí las tiene - muchas - la derivabilidad de una función en todos los puntos de un abierto, propiedad que se denomina con un nombre muy extravagante: holomorfía. A partir de aquí comienzan las grandes diferencias con al Análisis I. ¿Y el Análisis II? Y bien, lo mismo que en el caso de límites y continuidad, veremos (Teorema de Cauchy-Riemann) cómo se traduce la derivabilidad de una función de variable compleja en términos de sus componentes real e imaginaria, que son dos campos escalares en un dominio del plano. Para comprender las enormes diferencias que hacen del análisis de variable compleja tan especial e importante (una de las joyas más hermosas y potentes de la mente humana), debemos esperar al capítulo de integración.

A partir de ahora y salvo indicación en contrario, los dominios de las funciones que vamos a estudiar serán subconjuntos abiertos no vacíos del plano complejo. La razón es la misma que en Análisis I y II: para el estudio de la derivabilidad de una función en un punto, la variable debe poder "moverse" desde ese punto en cualquier dirección, aunque sea un "poquito", sin "salirse" del dominio de la función.

En mis clases presenciales, aclaro a los alumnos que las demostraciones son "*optativas ma non troppo*". En una primera lectura pueden omitirse, pero de vez en cuando *conviene recordar que la matemática no es una ciencia empírica* (frase memorable de un amigo y colega y que repito cada vez con mayor frecuencia)

Comencemos con las definiciones, como corresponde.

DEFINICIÓN 5.1: Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in D$. Entonces:

i) *f* es derivable en z_0 sii existe el límite (finito) $\underset{z \to z_0}{Lim} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Dado que z_0 es punto de acumulación de $D-\{z_0\}$, este límite es único y se denomina derivada de *f* en z_0. Se indica $f'(z_0)$, es decir:

$$f'(z_0) = \underset{z \to z_0}{Lim} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \qquad (*5.1)$$

ii) *f* es holomorfa en z_0 sii es derivable en todos los puntos de un entorno $D(z_0, r) \subseteq D$.

iii) *f* es derivable en *D* sii es derivable en todos los puntos del abierto *D*. En este caso, la función $f': D \longrightarrow \mathbb{C}$ se denomina derivada de *f* en *D*.

***Observación* 5.1**: *f* es holomorfa en todos los puntos de *D* sii es derivable en todos los puntos de *D*: meditarlo cuidadosamente para saber si entendió las definiciones. Tener presente que *D* es abierto. Entonces, en *iii*) puede reemplazarse "derivable" por "holomorfa".

***Nota* 5.1:** Igual que en Análisis I, la derivada es el límite de un cociente incremental, y también se tienen las notaciones clásicas para este cociente y para las derivadas:

$$f'(z_0) = \underset{\Delta z \to 0}{Lim} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \underset{\Delta z \to 0}{Lim} \frac{\Delta f}{\Delta z}(z_0) = \frac{df}{df}(z_0) \qquad (*5.2)$$

(Por si estaba desprevenido, le repito que éstas son notaciones, no definiciones)

PROPOSICIÓN 5.1 (*Expresión diferencial de la derivabilidad*)
Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in D$. Entonces, *f* es derivable en z_0 si y solamente si existen: un número $\lambda \in \mathbb{C}$ y una función $\alpha : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que

(I) Para todo $z \in D$: $f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + (z - z_0)\alpha(z)$
(II) $\underline{Lim}_{z \to z_0}\, \alpha(z) = 0$ (*5.3)

y en caso de que esto ocurra, $\lambda = f'(z_0)$.

Nota 5.2: Pocas veces en la historia debe haber ocurrido que dos formas distintas de expresar lo mismo hayan tenido la importancia que tuvo en este caso. El alumno puede reconocer en el segundo miembro de (I) a la función $p(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$, la "mejor aproximación lineal de *f* en torno de z_0". Se trata del polinomio de Taylor de primer orden (centrado en z_0) y la condición (II) indica que se trata de una "buena" aproximación local. El término $f'(z_0)(z - z_0)$ no es otra cosa que el *diferencial* de f en z_0, y la notación clásica (y algo críptica) es $df = f'(z_0)\Delta z$. Por otra parte, es importante tener en cuenta que las condiciones (I) y (II) determinan unívocamente la derivada de *f* en dicho punto, además de la función α. Es decir: si tuviéramos

(I) Para todo $z \in D$: $f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + (z - z_0)\alpha(z)$
(II) $\underline{Lim}_{z \to z_0}\, \alpha(z) = 0$

y además

(I)' Para todo $z \in D$: $f(z) = f(z_0) + \mu(z - z_0) + (z - z_0)\beta(z)$
(II)' $\underline{Lim}_{z \to z_0}\, \beta(z) = 0$

entonces, necesariamente $\mu = \lambda$ y $\beta(z) = \alpha(z)$ para todo $z \in D$. Esto es consecuencia inmediata de la demostración de la Proposición 5.2, que no omitimos en este breve apunte, dada la importancia de la misma.

***Prueba de la Proposición* 5.1**:
($\Rightarrow$) Aquí la hipótesis es la derivabilidad de *f* en z_0. Entonces, definimos $\alpha : D \longrightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente manera

$$\alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & si \quad z \in D - \{z_0\} \\ 0 & si \quad z = z_0 \end{cases} \qquad (*5.4)$$

Esta función verifica, por hipótesis y por definición de derivada, la condición (II). Obsérvese que la definición de α en z_0 es arbitraria, podría haberse definido de cualquier otra manera. La elección $\alpha(z_0) = 0$ es una concesión a la continuidad (es más prolijito...) Ahora, despejando $f(z)$ de la primera línea de (*5.4) obtenemos (I) con $\lambda = f'(z_0)$ y $z \neq z_0$. Para $z = z_0$ la igualdad (I) se verifica trivialmente, independientemente del valor de α en z_0.

($\Leftarrow$) Ahora, la hipótesis es la existencia del número λ y de la función α que verifican (I) y (II). De (I) se puede despejar, para todo $D - \{z_0\}$:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda + \alpha(z)$$

Por lo tanto, puesto que por hipótesis m $\underset{z \to z_0}{Lim} \alpha(z) = 0$, tomando límites en ambos miembros de la identidad anterior obtenemos $\underset{z \to z_0}{Lim} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lambda$, lo que demuestra al mismo tiempo que f es derivable en z_0 y que $\lambda = f'(z_0)$. ■

Una primera consecuencia, no menor, lo mismo que en Análisis I, es la siguiente:

COROLARIO 5.1: (*Continuidad de las derivables*)
Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{C}$ y derivable en $z_0 \in D$. Entonces, f es continua en z_0.
Prueba: Por ser D abierto, todos sus puntos son puntos de acumulación del mismo. Por lo tanto, para probar la continuidad de f en z_0 basta ver que $\underset{z \to z_0}{Lim} f(z) = f(z_0)$, pero esto es consecuencia inmediata de (*5.3) ■

***Observación* 5.2**: Tal como usted debe estar sospechando, la recíproca no es cierta. En muy poco tiempo va a poder encontrar ejemplos muy sencillos de continuas no derivables.

A continuación, un formulario de reglas de derivación, que para tranquilidad y alivio del alumno, son las mismas que las de Análisis I. Como dijo alguna vez el Swami Sri Cachile: “definiciones idénticas tienen consecuencias idénticas”.

PROPOSICIÓN 5.2: (*Álgebra de derivables y reglas de derivación*)

(*i*) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{C}$, derivable en $z_0 \in D$ y sea $D_0 \subseteq D$ un subconjunto también abierto que contiene al punto z_0. Entonces, la restricción $f_{|D_0} : D_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ de f a D_0 también es derivable en z_0 y además $f'_{|D_0}(z_0) = f'(z_0)$.

(ii) Sean $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ y $g:D\longrightarrow\mathbb{C}$ dos funciones definidas en un conjunto abierto $D\subseteq\mathbb{C}$, derivables en $z_0\in D$, y sea $c\in\mathbb{C}$ una constante. Entonces, $f+g, f-g, fg$ y cf son derivables en z_0 y además se verifican las siguientes igualdades : $(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)$, $(f-g)'(z_0)=f'(z_0)-g'(z_0)$ y $(cf)'(z_0)=cf'(z_0)$. Para el producto vale la regla de Leibniz: $(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$.

(iii) Sea $k:D\longrightarrow\mathbb{C}$ una función constante en un abierto $D\subseteq\mathbb{C}$. Entonces k es derivable en D y su derivada es idénticamente nula.

(iv) Sea $Id:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ la función $z\mapsto z$ (es decir, la identidad). Entonces, Id es derivable (en todo el plano) y su derivada es la constante $z\mapsto 1$.

(v) Sea $J:\mathbb{C}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{C}-\{0\}$ la inversión multiplicativa $z\mapsto\frac{1}{z}$. Entonces, J es derivable en todo su dominio y su derivada es $z\mapsto-\frac{1}{z^2}$

(vi) Sean $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ y $g:E\longrightarrow\mathbb{C}$ dos funciones definidas en conjuntos abiertos $D\subseteq\mathbb{C}$ y $E\subseteq\mathbb{C}$ tales que: 1) la imagen de f está contenida en el dominio E de g, es decir: existe la composición $g\circ f:D\longrightarrow\mathbb{C}$; 2) f es derivable en un punto $z_0\in D$ y 3) g es derivable en el punto $w_0 = g(f(z_0))$. Entonces, $g\circ f$ es derivable en z_0 y su derivada es $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))f'(z_0)$.

(vii) Sean $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ y $g:D\longrightarrow\mathbb{C}$ dos funciones definidas en un conjunto abierto $D\subseteq\mathbb{C}$, derivables en $z_0\in D$ y supongamos que g no se anula en ningún punto de D. Entonces, $\frac{f}{g}:D\longrightarrow\mathbb{C}$ es derivable en $z_0\in D$ y además

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

Prueba: las demostraciones son idénticas a las correspondientes de Análisis I y algunas de ellas son simples aplicaciones de la definición de derivada o de su expresión diferencial dada en la Proposición 5.1, como por ejemplo la propiedad (i). Dicho sea de paso, el alumno no debe menospreciar esta sencilla propiedad (i) y no debe dejarse engañar por su aspecto inofensivo. En los cálculos de derivadas de composiciones se utiliza permanentemente. Demostraremos aquí algunas de estas propiedades, a modo de ejemplo.

Prueba de la regla de Leibniz (ítem (*ii*)): para todo $z \in D - \{z_0\}$ (luego tomamos límite para z tendiendo a z_0):

$$\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} =$$

$$= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z) + f(z_0)\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[z \to z_0]{} f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(en algún lugar - ¿dónde? - hemos utilizado la continuidad de g en z_0, lo que es lícito pues es derivable en este punto).

Prueba de (*v*): sea $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Entonces para todo $z \in \mathbb{C} - \{0, z_0\}$ (luego tomamos límite para z tendiendo a z_0 en $\mathbb{C} - \{0\}$) :

$$\frac{J(z) - J(z_0)}{z - z_0} = \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \frac{z_0 - z}{zz_0(z - z_0)} = -\frac{1}{zz_0} \xrightarrow[z \to z_0]{} -\frac{1}{z_0^2}$$

(en algún lugar - ¿dónde? - hemos utilizado la continuidad de J y de las funciones constantes)

Prueba de (*vi*): Por hipótesis y por consecuencia 5.2, tenemos que existe $\beta : E \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

(I) Para todo $w \in E : g(w) = g(w_0) + g'(w_0)(w - w_0) + (w - w_0)\beta(w)$
(II) $\underset{w \to w_0}{Lim} \beta(w) = 0$

En particular, utilizando (*I*) para cada $w = f(z)$, con $z \in D$:

$$g(\overbrace{f(z)}^{w}) = g(\overbrace{f(z_0)}^{w_0}) + g'(\overbrace{f(z_0)}^{w_0})[\overbrace{f(z)}^{w} - \overbrace{f(z_0)}^{w_0}] + [\overbrace{f(z)}^{w} - \overbrace{f(z_0)}^{w_0}]\beta(\overbrace{f(z)}^{w})$$

Por lo tanto, para todo $z \in D - \{z_0\}$ (luego tomamos límites para z tendiendo a z_0):

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = g'(f(z_0))\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\beta(f(z))$$

$$\xrightarrow[z\to z_0]{} g'(f(z_0))f'(z_0)+f'(z_0)\overbrace{\underset{z\longrightarrow z_0}{Lim}\beta(f(z))}^{=0}=g'(f(z_0))f'(z_0)$$

En este último paso hemos utilizado casi todas las propiedades de límites que hemos visto en el capítulo anterior y el hecho de que f es continua en z_0 (pues es derivable en este punto por hipótesis): de aquí resulta que $\underset{z\longrightarrow z_0}{Lim}\beta(f(z))=0$. Meditarlo como ejercicio: es algo así: dado $\varepsilon>0$ existe $r>0$ tal que $|\beta(w)|<\varepsilon$ para todo $w\in E$ que verifique $|w-w_0|<r$. Pero $w_0=f(z_0)$ y f es continua en z_0. Por lo tanto, dado este $r>0$ existe $\delta>0$ tal que $|f(z)-f(z_0)|<r$ para todo $z\in D$ que verifique $|z-z_0|<\delta$. Entonces, enganchamos las implicaciones: $z\in D\wedge|z-z_0|<\delta\Rightarrow\left|\overbrace{f(z)}^{w}-\overbrace{f(z_0)}^{w_0}\right|\Rightarrow\left|\beta(\overbrace{f(z)}^{w})\right|<\varepsilon$.

Prueba de (*vii*): esta propiedad es consecuencia directa de las tres anteriores (por eso las hemos puesto en ese orden):

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\big(f.(J\circ g)\big)'(z_0)\overset{(ii)}{=}f'(z_0)(J\circ g)(z_0)+f(z_0)(J\circ g)'(z_0)\overset{(vi)}{=}$$

$$=f'(z_0)\frac{1}{g(z_0)}+f(z_0)J'(g(z_0))g'(z_0)\overset{(v)}{=}\frac{f'(z_0)}{g(z_0)}-f(z_0)\frac{1}{g(z_0)^2}g'(z_0)=$$
$$=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

■

***Observación* 5.3**: Todas estas propiedades y reglas de derivación son válidas, obviamente, para funciones derivables en un abierto. Es decir: puede reescribirse todo el enunciado anterior cambiando la hipótesis "derivable en z_0" por "derivable en D", y extendiendo las reglas de derivación. Por ejemplo: el ítem (*ii*) quedaría:
(*ii*) Sean $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ y $g:D\longrightarrow\mathbb{C}$ dos funciones definidas y <u>derivables</u> en un conjunto abierto $D\subseteq\mathbb{C}$, y sea $c\in\mathbb{C}$ una constante. Entonces, $f+g, f-g, fg$ y cf son derivables en D y además, para todo $z\in D$ se verifican las igualdades: $(f+g)'(z)=f'(z)+g'(z)$, $(f-g)'(z)=f'(z)-g'(z)$ y $(cf)'(z)=cf'(z)$. Para el producto vale la regla de Leibniz: $\forall z\in D:(fg)'(z)=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$.

Por otra parte, tal como ocurre en Análisis I, esta proposición es una verdadera "máquina de calcular derivadas", como puede verse en los siguientes ejemplos.

***Ejemplos* 5.1**: Los ejemplos más sencillos son las constantes, la identidad y la inversión, tratados en la proposición precedente. Veamos cómo las reglas de derivación permiten derivar una familia mucho más amplia de funciones (lo mismo que en Análisis I):

(a) *Potencias positivas*: para cada entero $n \geq 0$, sea $p_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la función dada por $p_n(z) = z^n$. Obsérvese que p_0 es la función constante (= 1), con la convención habitual de definirla también como 1 en $z = 0$, y que $p_1 = Id$, la función identidad. Por lo tanto, de la proposición precedente tenemos que p_0 y p_1 son derivables en todo el plano con derivadas $p_0' = 0$ y $p_1' = p_0$. Ahora, $p_2 = p_1 p_1$ y por la regla de Leibniz resulta $p_2' = p_1' p_1 + p_1 p_1' = 2p_1 p_1' = 2p_1 p_0 = 2p_1$. Seguimos un poco: $p_3 = p_2 p_1$, y por la misma regla: $p_3' = p_2' p_1 + p_2 p_1' = 2p_1 p_1 + p_2 p_0 = 2p_2 + p_2 = 3p_2$. Se puede ver fácilmente (esto se formaliza mediante lo que se denomina *recurrencia*), que cada p_n es derivable en todo el plano y que $p_n' = np_{n-1}$. Esta fórmula se escribe habitual e informalmente, como $(z^n)' = nz^{n-1}$. Supongo que le suena conocida desde su más tierna infancia.

(b) *Potencias negativas*: utilizando la notación del ítem (a), para cada entero $n > 0$, sea $p_{-n} : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $p_{-n}(z) = z^{-n} = \dfrac{1}{p_n(z)}$, es decir: $p_{-n} = J \circ p_n$, lo que implica inmediatamente que estas funciones son derivables en cada punto de su dominio y que además, utilizando los ítems (*v*) y (*vi*) de la Proposición 5.2:

$$p_{-n}'(z) = (J \circ p_n)(z) = J'(p_n(z))p_n'(z) = -\frac{1}{p_n(z)^2} np_{n-1}(z) = -n\frac{z^{n-1}}{z^{2n}} = -nz^{-n-1} = -np_{-n-1}(z)$$

para cada $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Es decir, informalmente: $(z^{-n})' = -nz^{-n-1}$.

(c) *Polinomios*: como sabemos desde Salita Naranja, son las funciones $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forma $P(z) = c_0 + c_1 z^2 + c_2 z^3 + ... + c_m z^m$, donde m es un entero no negativo y $c_0, c_1, ..., c_m$ son números complejos (constantes) denominados coeficientes del polinomio. Podemos escribir, entonces, $P = c_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 + ... + c_m p_m$ y utilizar las reglas de derivación dadas en la Proposición 5.2 y lo visto en (a) para calcular:

$$P' = c_0' + c_1 p_1' + c_2 p_2' + ... + c_m p_m' = c_1 p_0 + c_2 2p_1 + c_3 3p_2 + ... + c_m mp_{m-1}$$

Es decir: para todo $z \in \mathbb{C}$: $P'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + ... + mc_m z^{m-1}$, como era de esperar (ya lo había predicho el Swami Sri Cachile…).

(d) *Funciones racionales*: son las funciones que son cocientes de polinomios, es decir: funciones de la forma $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ donde P y Q son dos polinomios, y su dominio es $D = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$. (Obviamente, se supone que Q no es el polinomio nulo, caso contrario este dominio es vací). Puede verse fácilmente que este dominio es un conjunto abierto (no es mal ejercicio demostrarlo) y por lo tanto la restricción de Q a D es derivable (en todos los puntos de *D*). Obsérvese que en la definición de *f* no es *Q* lo que interviene, si no la <u>restricción</u> de *Q* a *D*. Es decir: formal y rigurosamente es $f = P.(J \circ Q_{|D})$, pues <u>no se puede componer</u> $J \circ Q$. Piense, por ejemplo, en $f(z) = \dfrac{z^2 - 4z + 2}{z^2 + 1}$. El denominador es una función *Q* definida en todo el plano complejo, pero el dominio de *f* no es todo el plano complejo, es $D = \mathbb{C} - \{-i, i\}$. De todos modos, sería muy recargada la notación $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q_{|D}(z)}$ y preferimos sobreentender la restricción. Lo que sí tenemos que tener en cuenta que como *Q* es derivable en todo el plano, su restricción al abierto *D* es derivable en todos los puntos de este dominio y por lo tanto *f* resulta derivable en todos los puntos de su dominio *D*. Sabemos derivar polinomios y conocemos la "regla del cociente" y entonces podemos calcular directamente: $f'(z) = \dfrac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}$.

(e) *Momento cultural*: *Polinomios de Laurent*: Los polinomios de Laurent no son polinomios, a pesar de su nombre. Son funciones racionales. Así como los polinomios son combinaciones lineales de potencias positivas, los polinomios de Laurent son combinaciones lineales de potencias positivas y negativas, es decir, son funciones la forma $f(z) = \dfrac{c_{-m}}{z^m} + \dfrac{c_{-m+1}}{z^{m-1}} + ... + \dfrac{c_{-2}}{z^2} + \dfrac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n$, con dominio *D* = $\mathbb{C} - \{0\}$ y los coeficientes $c_{-m}, c_{-m+1}, ..., c_0, c_1, c_2 ..., c_n$ son constantes complejas. Como puede verse inmediatamente son derivables en todos los puntos de su dominio y sus derivadas pueden calcularse fácilmente. Hemos incluido aquí a estas funciones por una razón histórica: han jugado un papel central en desarrollos muy profundos del álgebra y de la geometría que han ocurrido en el siglo XX. Por otra parte, veremos, más adelante una especie de generalización de estas funciones: las series de Laurent. Así como las series de potencias son determinadas sucesiones de polinomios, las series de Laurent son determinadas sucesiones de polinomios de Laurent.

***Observación* 5.4:** Las funciones que acabamos de presentar tienen una propiedad muy importante: son estables respecto de la derivación: la derivada de un polinomio es un polinomio y la derivada de una función racional es una función racional. Esta propiedad facilita, entre otras cosas, el cálculo de *primitivas* de estas funciones. El concepto de primitiva es idéntico al de Análisis I, pero a pesar de esto vamos a dar su definición.

DEFINICIÓN 5.2: Dada una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$, una <u>primitiva</u> de *f* es una función derivable $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in D : F'(z) = f(z)$.

La existencia de primitivas es el primer problema que se plantea a partir de la definición. No es un problema trivial y lo resolveremos parcialmente más adelante. Veremos que toda función holomorfa en un dominio abierto simplemente conexo admite primitivas en dicho dominio. Respecto de la unicidad de las primitivas, la respuesta es más sencilla (y es negativa). Lo mismo que en Análisis I, la conexidad del dominio es clave. Existe una recíproca parcial del ítem (*iii*) de la Proposición 5.2, que afirma que las constantes tienen derivada idénticamente nula. Esta recíproca es la Proposición 5.4, cuya demostración requiere un resultado previo que presentamos en la siguiente proposición. Se trata de una variante de la "regla de la cadena" y va a tener consecuencias geométricas muy importantes cuando pasemos al tema de "transformaciones conformes".

PROPOSICIÓN 5.3: Sean:

(a) $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto $D \subseteq \mathbb{C}$,

(b) $\gamma : I \longrightarrow D$ una función derivable en un intervalo abierto $I \subseteq \Re$,

Entonces, la función $\sigma = f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en el intervalo abierto *I* y además, para cada $t \in I$ se verifica:

$$\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \qquad (*5.5)$$

Prueba: Navegamos hacia Análisis II y arribamos al "Puerto de las Trayectorias Planas". Tenemos que probar que para cada $t_0 \in I$, el límite $\underset{t \to t_0}{Lim} \dfrac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0}$ existe y es igual a $\sigma'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)$. Veamos: para todo $t \in I - \{t_0\}$

$$\frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} \qquad (*5.5)$$

Por otra parte, *f* es derivable en $z_0 = \gamma(t_0)$, por lo tanto (Proposición 5.1), para todo $z \in D$ podemos escribir $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\alpha(z)$, donde $\alpha : D \to \mathbb{C}$ verifica $\underset{z \to z_0}{Lim} \alpha(z) = 0$. En particular, para cada $z = \gamma(t)$ tenemos:

$$f(\gamma(t)) = f(z_0) + f'(z_0)[\gamma(t)) - z_0] + [\gamma(t)) - z_0]\alpha(\gamma(t)) \qquad (*5.6)$$

Reemplazando en (*5.5) y teniendo en cuenta que $z_0 = \gamma(t_0)$, se tiene

$$\frac{\sigma(t) - \sigma(t_0)}{t - t_0} = \frac{f'(z_0)[\gamma(t) - \overbrace{\gamma(t_0)}^{z_0}] + [\gamma(t) - \overbrace{\gamma(t_0)}^{z_0}]\alpha(\gamma(t))}{t - t_0} =$$

$$= f'(z_0)\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} + \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\alpha(\gamma(t))$$

Tomando límites para $t \to t_0$ (recuerde que $t \in I - \{t_0\}$) en el último miembro obtenemos

$$f'(z_0)\,{}_t\underset{t_0}{\underline{Lim}}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} + {}_t\underset{t_0}{\underline{Lim}}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\,{}_t\underset{t_0}{\underline{Lim}}\,\alpha(\gamma(t)) = f'(z_0)\gamma'(t_0) + \gamma'(t_0).0\,,$$

lo que demuestra la tesis (dejamos los detalles que faltan como ejercicio). ■

PROPOSICIÓN 5.4

Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función derivable en un abierto <u>conexo</u> $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$. Entonces, *f* es constante en *D*.

Prueba: Dado un punto $z_0 \in D$, por ser *D* abierto y conexo, para cualquier otro punto $z_1 \in D$ existe un curva regular $C \subset D$ de origen z_0 y extremo z_1. Entre otras cosas, esto significa que existe una función $\gamma : I \longrightarrow D$ derivable en un intervalo abierto $I \subseteq \Re$ tal que $\gamma(t_0) = z_0$ y $\gamma(t_1) = z_1$ para algún par de puntos t_0 y t_1 del intervalo *I* (esta función γ no es otra cosa que parametrización regular de *C*, lo que por definición de parametrización regular significa que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$). Aplicando la proposición anterior a $\sigma = f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$, tenemos que para todo $t \in I$ se verifica $\sigma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$, por hipótesis. Por lo tanto las componentes de σ tienen derivadas nulas en todos los puntos de *I*. <u>Puesto que *I* es un intervalo</u> (ver observación 5.5 a continuación), esto significa que estas componentes son constantes en *I*, y por lo tanto la función σ es constante en *I*, es decir: existe una constante $k \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma(t) = k$ para todo $t \in I$. En particular,

$$f(z_0) = f(\gamma(t_0)) = \sigma(t_0) = k = \sigma(t_1) = f(\gamma(t_1)) = f(z_1)$$

Es decir, para todo $z_1 \in D$ es $f(z_1) = f(z_0)$. ■

COROLARIO 5.2: Sean $F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $G : D \longrightarrow \mathbb{C}$ dos primitivas de una misma función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ en un abierto <u>conexo</u> $D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces $G - F$ es constante en *D*.

Prueba: la función $h = G - F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable y su derivada es nula en todos los puntos del abierto conexo *D*. ■

***Observación* 5.5**: Si D no es conexo, tanto la Proposición 5.3 como su Corolario 5.2 son manifiestamente falsos. Por ejemplo, dado el abierto $D = \{x + iy \in \mathbb{C} : y \neq 0\}$, la función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(x+iy) = \begin{cases} 1 & si \quad y > 0 \\ -1 & si \quad y < 0 \end{cases}$ es derivable y su derivada es nula en todo punto de D: su restricción a $D^+ = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ es constante (= 1) y por lo tanto es derivable con derivada nula en D^+; lo mismo ocurre con su restricción al semiplano $D^- = \{x + iy \in \mathbb{C} : y < 0\}$, donde es constante (= -1). Es decir, *f* tiene derivada nula en todo *D* y sin embargo no es constante en *D*, como es de dominio público. En cuanto al corolario, por el momento solo podemos mencionar ejemplos dentro del Análisis I: las funciones

$$F : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \longrightarrow \Re \quad \text{tal que} \quad F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

y

$$G : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \longrightarrow \Re \quad \text{tal que} \quad G(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x^2 - 1} & si \quad x > 0 \\ -1 + \sqrt{x^2 - 1} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

son dos primitivas de la función $f : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \longrightarrow \Re$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Sin embargo, la diferencia $G - F$ no es constante en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, como puede verse con una cuenta muy sencilla. Es decir: las primitivas de una función no son de la forma "*F* + *Cte*" como suelen aparecer en las tablas. Eso es cierto cuando el dominio involucrado es un intervalo. No es casual que los subconjuntos conexos de la recta real sean, precisamente, los intervalos.

Pasemos ahora al problema de estudiar la derivabilidad de funciones de variable compleja en términos de sus componentes real e imaginaria. Euler, D'Alembert, Cauchy y Riemann resolvieron este tema y además descubrieron la forma de calcular las derivadas a partir, precisamente, de esas componentes. Insistimos en que se trata de una cuestión práctica. Por ejemplo, si nos encontramos en una esquina del barrio con la función $f(x+iy) = xy^2 + sen(e^x y) + i\cos(x^2 + yx)$, para utilizar la definición o la proposición la propiedad 5.2, por ejemplo, estaríamos en serios problemas. Pero luego de conocer el siguiente teorema, usted va a tener recursos como para saber rápidamente si esta función es derivable en algún punto del plano complejo, si es que los hay, y en esos puntos podrá calcular fácilmente las correspondientes derivadas. En este punto, navegaremos en las aguas cristalinas del Análisis II y tal vez sea el momento de repasar cuidadosamente el concepto de diferenciabilidad de campos escalares.

TEOREMA 5.1 (*Euler-D'Alembert-Cauchy-Riemann*)**:** Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{C}$, y sean $u: D \longrightarrow \Re$ y $v: D \longrightarrow \Re$ sus componentes real e imaginaria respectivamente, es decir: para todo $x+iy \in D$: $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Entonces, *f* es derivable en un punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ si y solamente si se verifican las dos siguientes condiciones:

(a) u y v son diferenciables en (x_0, y_0)

y además

$$\text{(b)} \begin{cases} (i) \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ (ii) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

En ese caso, $f'(x_0+iy_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Las ecuaciones (*i*) y (*ii*) se conocen popularmente (son muy mencionadas en los programas televisivos de la farándula) como "ecuaciones de Cauchy-Riemann", lo que implica una injusticia histórica.

Prueba de la implicación ($\Rightarrow$)**:**

Utilizaremos la expresión diferencial de la derivabilidad (Proposición 5.1), destacando componentes real e imaginaria de cada término. Para todo $x+iy \in D$:

$$\overbrace{u(x,y)+iv(x,y)}^{f(z)} = \overbrace{u(x_0+iy_0)+iv(x_0+iy_0)}^{f(z_0)} + \overbrace{[a+ib]}^{f'(z_0)}\overbrace{[x-x_0+i(y-y_0)]}^{z-z_0} +$$
$$+\overbrace{[x-x_0+i(y-y_0)]}^{z-z_0}\overbrace{[p(x,y)+iq(x,y)}^{\alpha(z)}$$

donde las funciones p y q son las partes real e imaginaria de $\alpha: D \longrightarrow \mathbb{C}$, que por hipótesis verifica $\underset{z \to z_0}{Lim}\, \alpha(z) = 0$. Por lo tanto ("límite componente a componente") tenemos $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim} p(x,y) = 0$ y $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim} q(x,y) = 0$.

Igualando partes real e imaginaria de ambos miembros obtenemos:

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + a(x-x_0) - b(y-y_0) + \overbrace{(x-x_0)p(x,y) - (y-y_0)q(x,y)}^{A(x,y)}$$

$$v(x,y) = v(x_0,y_0) + b(x-x_0) + a(y-y_0) + \overbrace{(x-x_0)q(x,y) + (y-y_0)p(x,y)}^{B(x,y)}$$

Ahora, para todo $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ podemos escribir

$$A(x,y)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\overbrace{\left[\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}p(x,y)-\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}q(x,y)\right]}^{\varphi(x,y)}$$

y

$$B(x,y)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\overbrace{\left[\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}q(x,y)+\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}p(x,y)\right]}^{\psi(x,y)}$$

donde las funciones $\varphi: D-\{(x_0,y_0)\}\longrightarrow \mathbb{C}$ y $\psi: D-\{(x_0,y_0)\}\longrightarrow \mathbb{C}$ verifican $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim}\varphi(x,y)=0$ y $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim}\psi(x,y)=0$. Esto se debe (recordar los tiempos del Análisis II….) a que las funciones $\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$ y $\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$ son acotadas (varían entre -1 y 1) y a que, por hipótesis, $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim}p(x,y)=0$ y $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim}q(x,y)=0$.

Entonces, extendiendo las funciones φ y ψ al dominio D mediante la asignación $\varphi(x_0,y_0)=0$ y $\psi(x_0,y_0)=0$, tenemos que para todo $(x,y)\in D$:

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)+a(x-x_0)-b(y-y_0)+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,\varphi(x,y)$$

y (*5.7)

$$v(x,y)=v(x_0,y_0)+b(x-x_0)+a(y-y_0)+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,\psi(x,y)$$

donde las funciones $\varphi: D\longrightarrow \mathbb{C}$ y $\psi: D\longrightarrow \mathbb{C}$ verifican $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim}\varphi(x,y)=0$ y $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim}\psi(x,y)=0$. Se deduce inmediatamente que:

$$\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0}=a+\overbrace{\frac{|x-x_0|}{x-x_0}}^{ACOTADO}\varphi(x,y_0)\xrightarrow[x\to x_0]{}a$$

$$\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0}=-b+\frac{\overbrace{|y-y_0|}^{ACOTADO}}{y-y_0}\varphi(x_0,y)\xrightarrow[y\to y_0]{}-b$$

$$\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}=b+\frac{\overbrace{|x-x_0|}^{ACOTADO}}{x-x_0}\psi(x,y_0)\xrightarrow[x\to x_0]{}b$$

$$\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}=a+\frac{\overbrace{|y-y_0|}^{ACOTADO}}{y-y_0}\psi(x_0,y)\xrightarrow[y\to y_0]{}a$$

Es decir, hemos probado existen las derivadas parciales de *u* y *v* en (x_0,y_0) y además que valen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=a=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=b=\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad (*5.8)$$

Estas igualdades incluyen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y además la igualdad

$$f'(x_0+iy_0)=a+ib=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Por último, de (*5.7) y (*5.8) tenemos que para todo $(x,y)\in D$:

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)+\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\varphi(x,y)$$

y

$$v(x,y)=v(x_0,y_0)+\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\psi(x,y)$$

donde las funciones $\varphi:D\longrightarrow\mathbb{C}$ y $\psi:D\longrightarrow\mathbb{C}$ verifican $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim}\varphi(x,y)=0$ y $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim}\psi(x,y)=0$. Es decir: *u* y *v* son diferenciables en (x_0,y_0) .

Prueba de la implicación ($\Leftarrow$): Manteniendo la notación, tenemos

$$f(z)-f(z_0)=f(x+iy)-f(x_0+iy_0)=u(x,y)-u(x_0,y_0)+i[v(x,y)-v_0(x,y)]\overset{Hip(a)}{=}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,\varphi(x,y)+$$

$$+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+i\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,\psi(x,y)\overset{Hip(b)}{=}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,\varphi(x,y)+$$
$$-i\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+i\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(y-y_0)+i\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\,\psi(x,y)=$$

$$=\overbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right]}^{\lambda}\overbrace{[(x-x_0)+i(y-y_0)]}^{z-z_0}+\overbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}^{|z-z_0|}\,\overbrace{[\varphi(x,y)+i\psi(x,y)]}^{\alpha(z)}$$

donde $\alpha(z)=\alpha(x+iy)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)$ tiende a cero cuando z tiende a z_0, dado que $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim}\varphi(x,y)=\ 0=\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lim}\varphi(x,y)$. Hemos demostrado que para todo $z\in D$ se verifica que $f(z)-f(z_0)=\lambda(z-z_0)+(z-z_0)\alpha(z)$, donde $\underset{z\to z_0}{Lim}\alpha(z)=0$ y la constante λ es

$$\lambda=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\overset{Hip(b)}{=}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

De acuerdo con la Proposición 5.1, esto concluye la demostración. ■